Доказать, что

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} < 2$$

Где в левой части эн двоек.

Обозначим

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Разумеется

$$x > 0$$

Возведём в квадрат.

$$x^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}$$

И теперь гениальным образом догадаемся, что корень в правой части это и есть икс !!!!!

$$x^2 = 2 + x$$

Решим это квадратное уравнение

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Наш корень положительный

$$x = 2$$

Итак, мы узнали, что

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2$$

Естественно, если извлекать корень не бесконечное число раз, а только эн раз то будет меньше двойки.

Если кому-то такое доказательство показалось неубедительным, то докажем его методом математической индукции.

1) Индукционная База

$$\sqrt{2} < 2$$

Естественно, это верное утверждение.

2) Индукционный Переход.

Пусть

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}<2$$

Где в левой части эн двоек.

Докажем, что если двоек будет эн плюс одна, то неравенство тоже будет верно

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}<2$$

Поскольку обе части неравенства верные, то возведём в квадрат

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}^{\,2}<2^2$$

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}<4$$

Перенесём двойку в правую часть, обратив внимание, что теперь под корнем осталось эн двоек.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}<4-2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}<2$$

Получилось индукционное предположение равносильными преобразованиями. А оно верно по нашему предположению.

Доказано!